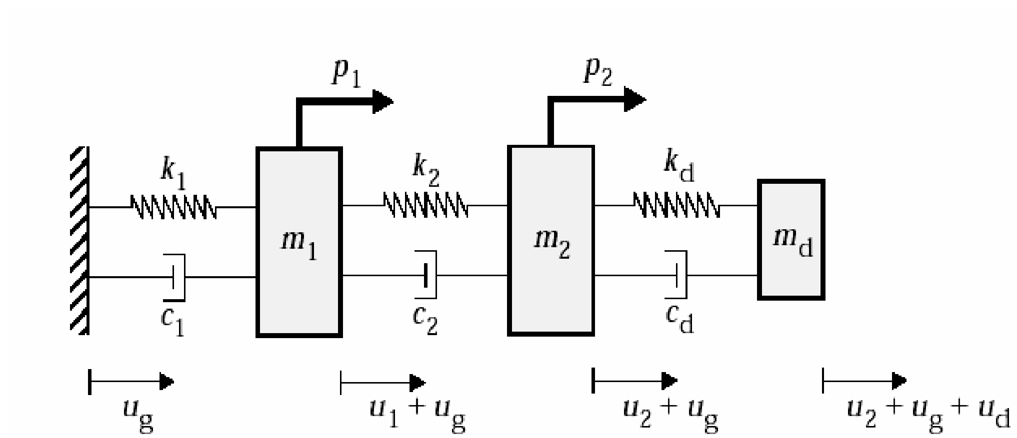
تهیه کننده: مهندس کسگین خواهشی – کارشناس ارشد مهندسی زلزله
پست الکترونیکی: UT_Engineer@Yahoo.com

تئوری میراگر جرمی تنظیم شده برای سیستم های MDOF

دراینجا تئوری SDOF که قبلاً ارائه گردید توسعه می‌یابد تا سیستم MDOF را که شامل تعدادی میراگرهای جرمی تنظیم شده واقع در سراسر سازه ا ست، در برگیرد. البته شبیه سازی های عددی که کاربرد این تئوری را در تعدادی سازه های ساختمانی نمونه بیان می‌کنند و همین شبیه سازی ها، پایه مقایسه بین طرح‌ها و مدل‌های مختلف در سرتاسر متن (این کتاب) هستند در فصل بعدی ارائه شده‌اند.



شکل ۴-۴۵: سیستم 2DOF با TMD

یک سیستم 2DOF که شامل یک میراگر متصل شده به جرم 2 می‌باشد در ابتدا ملاحظه می‌شود تا بتوان ایده‌های اساسی را از آن استخراج نمود. معادلات حاکم بر سیستم، که در شکل ۴-۴۵ نشان داده شده عبارتند از:

$$m_1\ddot{u}_1 + c_1\dot{u}_1 + k_1u_1 - k_2(u_2 - u_1) - c_2(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) = p_1 - m_1\ddot{u}_g \qquad (4.119)$$

$$m_2\ddot{u}_2 + c_2(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) + k_2(u_2 - u_1) - k_d u_d - c_d\dot{u}_d = p_2 - m_2\ddot{u}_g \qquad (4.120)$$

$$m_d\ddot{u}_d + k_d u_d + c_d\dot{u}_d = -m_d(\ddot{u}_2 + \ddot{u}_g) \qquad (4.121)$$

گام اساسی و کلیدی ترکیب معادلات (۴-۱۱۹) و (۴-۱۲۰) و بیان معادله منتجه در شکل مشابه حالت SDOF است که توسط معادله ۴-۱۰ تعریف شده است. این کار، مساله را به سیستم SDOF معادل کاهش می‌دهد. رویکردی که در اینجا می‌اید براساس تبدیل معادله ماتریس اصلی به معادلات مودال اسکالر است.

با استفاده از نماد ماتریسی، معادلات (۴-۱۱۹) و (۴-۱۲۰) به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \begin{bmatrix} p_1 - m_1 a_\mathrm{g} \\ p_2 - m_2 a_\mathrm{g} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ k_\mathrm{d} u_\mathrm{d} + c_\mathrm{d} \dot{u}_\mathrm{d} \end{bmatrix} \tag{4.122}$$

که ماتریس های مختلف عبارتند از:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \tag{4.123}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & \\ & m_2 \end{bmatrix} \tag{4.124}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \tag{4.125}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \tag{4.126}$$

با جایگذاری **U** به صورت بردارها و مختصات مودال:

$$\mathbf{U} = \mathbf{\Phi}_1 q_1 + \mathbf{\Phi}_2 q_2 \tag{4.127}$$

بردارهای مودال روابط عمود برهم (ارتوگونال) زیرین را ارضا می‌کنند.

(معادله (۲-۲۵۷) را ببینید)

$$\mathbf{\Phi}_j^\mathrm{T}\mathbf{K}\mathbf{\Phi}_i = \delta_{ij}\omega_j^2\mathbf{\Phi}_j^\mathrm{T}\mathbf{M}\mathbf{\Phi}_i \tag{4.128}$$

با تعریف جرم مودال و ترم های سختی و میرایی:

$$\tilde{m}_j = \Phi_j^1 \mathbf{M} \Phi_j \tag{4.129}$$

$$\tilde{k}_j = \Phi_j^{\mathrm{T}} \mathbf{K} \Phi_j = \omega_j^2 \tilde{m}_j \tag{4.130}$$

$$\tilde{c}_j = \Phi_j^{\mathrm{T}} \mathbf{C} \Phi_j \tag{4.131}$$

و بیان المان های φ_j به صورت:

$$\Phi_j = \begin{bmatrix} \Phi_{j1} \\ \Phi_{j2} \end{bmatrix} \tag{4.132}$$

و با فرض اینکه میرایی با سختی متناسب است:

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{K} \tag{4.133}$$

یک سری معادلات غیر درگیر (غیر کاپل) برای q_1 , q_2 بدست می ایند:

$$\tilde{m}_j \ddot{q}_j + \tilde{c}_j \dot{q}_j + \tilde{k}_j q_j = \Phi_{j1}(p_1 - m_1 a_{\mathrm{g}}) \qquad j = 1\,,\,2 \tag{4.134}$$
$$+ \Phi_{j2}(p_2 - m_2 a_{\mathrm{g}} + k_{\mathrm{d}} u_{\mathrm{d}} + c_{\mathrm{d}} \dot{u}_{\mathrm{d}})$$

با این فرض، نسبت میرایی مودال به ترتیب زیر داده می‌شود:

$$\xi_j = \frac{\tilde{c}_j}{2\omega_j \tilde{m}_j} = \frac{\alpha \omega_j}{2} \tag{4.135}$$

معادله (۴-۱۳۴) دو معادله را ارائه می‌کند. هر معادله یک سیستم SDOF بخصوص را که جرم، سختی و میرایی مساوی $\tilde{m}$, $\tilde{K}$, ξ دارد، تعریف می‌نماید. از آنجاییکه TMD برای دامنه‌های فرکانسی با عرض کم موثر است مجبوریم که تصمیم بگیریم که کدامین پاسخ رزونانسی مودال (مودی) در TMD کنترل کننده است. وقتی این تصمیم اتخاذ شد، تحلیل با استفاده از معادله مودی انتخابی و معادله اولیه TMD ((یعنی معادله (۴-۱۲۱)) ادامه می‌یابد.

فرض کنید پاسخ مودی اول کنترل کننده است. با در نظر گرفتن $j=1$ در معادله (۴-۱۳۳) به معادله زیر می‌رسیم:

$$\tilde{m}_1\ddot{q}_1 + \tilde{c}_1\dot{q}_1 + \tilde{k}_1 q_1 = \Phi_{11}p_1 + \Phi_{12}p_2 - [m_1\Phi_{11} + m_2\Phi_{12}]a_g + \Phi_{12}[k_d u_d + c_d \dot{u}_d] \quad (4.136)$$

در حالت کلی، u_2 با جمع آثار قوای مودی (مشارکت های مودی) بدست می‌اید:

$$u_2 = \Phi_{12}q_1 + \Phi_{22}q_2 \quad (4.137)$$

گرچه وقتی فرکانس بار خارجی نزدیک ω_1 است، پاسخ مود اول غالب خواهد بود و معقول است که فرض کنیم:

$$u_2 \approx \Phi_{12}q_1 \quad (4.138)$$

با حل q_1:

$$q_1 = \left[\frac{1}{\Phi_{12}}\right]u_2 \quad (4.139)$$

و با جایگذاری در معادله (۴-۱۳۶) بدست می آوریم:

$$\tilde{m}_{1e}\,\ddot{u}_2 + \tilde{c}_{1e}\,\dot{u}_2 + \tilde{k}_{1e}\,u_2 = k_d u_d + c_d \dot{u}_d + \tilde{p}_{1e} - \Gamma_{1e}\,\tilde{m}_{1e}\,a_g \quad (4.140)$$

که $\widetilde{P}_{le}, \widetilde{K}_{le}, \widetilde{C}_{le}, \widetilde{m}_{le}$ و Γ_{le},, پارامترهای معادل SDOF را برای ترکیب مود ۱ و گره ۲ را که TMD به آن متصل می‌شود نشان می‌دهد. معادلات آنها عبارتند از:

$$\tilde{m}_{1e} = \left[\frac{1}{\Phi_{12}^2}\right]\tilde{m}_1 \tag{4.141}$$

$$\tilde{k}_{1e} = \left[\frac{1}{\Phi_{12}^2}\right]\tilde{k}_1 \tag{4.142}$$

$$\tilde{c}_{1e} = \alpha\tilde{k}_{1e} \tag{4.143}$$

$$\tilde{p}_{1e} = \frac{\Phi_{11}p_1 + \Phi_{12}p_2}{\Phi_{12}} \tag{4.144}$$

$$\Gamma_{1e} = \frac{\Phi_{12}}{\tilde{m}_1}(m_1\Phi_{11} + m_2\Phi_{22}) \tag{4.145}$$

معادله ۴-۱۲۱ و ۴-۱۴۰ در شکل کلی به معادلات SDOF که در فصل قبل بودند شبیه هستند. هر دو سری معادلات در زیر مقایسه می‌شوند:

معادلات TMD:

$$\begin{gathered} m_d\,\ddot{u}_d + c_d\,\dot{u}_d + k_d\,u_d = -m_d(\ddot{u} - a_g) \\ vs \\ m_d\,\ddot{u}_d + c_d\,\dot{u}_d + k_d\,u_d = -m_d(\ddot{u}_2 - a_g) \end{gathered} \tag{4.146}$$

معادله جرم اولیه

$$\begin{gathered} m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = c_d\,\dot{u}_d + k_d\,u_d + p - ma_g \\ vs \\ \tilde{m}_{1e}\,\ddot{u}_2 + \tilde{c}_{1e}\,\dot{u}_2 + \tilde{k}_{1e}\,u_2 = c_d\,\dot{u}_d + k_d\,u_d + \tilde{p}_{1e} - \Gamma_{1e}\tilde{m}_{1e}a_g \end{gathered} \tag{4.147}$$

و با در نظر گرفتن:

$$\begin{gathered} u_2 \equiv u \qquad \tilde{m}_{1e} \equiv m \qquad \tilde{c}_{1e} \equiv c \qquad \tilde{k}_{1e} \equiv k \\ \tilde{p}_{1e} \equiv p \qquad \Gamma_{1e} \equiv \Gamma \end{gathered} \tag{4.148}$$

معادلات جرم اولیه برای حالت MDOF به صورت زیرین تبدیل می‌شود:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = c_d\,\dot{u}_d + k_d\,u_d + p - \Gamma m a_g \tag{4.149}$$

که از معادله SDOF مربوطه به اندازه ضریب Γ تفاوت دارد. بنابراین، حل مساله برای تحریک زمین که قبلاً ارائه شد باید اصلاح شود تا وجود Γ به حساب اید. حل عمومی به همان شکل حالت SDOF نوشته می‌شود. تنها لازم است که ترم‌های مربوط به a_g یعنی $H_6, H_8, \delta_6, \delta_8$ اصلاح شوند. شکل بسط یافته آنها در زیر لیست می‌شود:

$$H_6 = \frac{\sqrt{[(\Gamma+\overline{m})f^2 - \Gamma\rho^2]^2 + [2\xi_d\rho f(\Gamma+\overline{m})]^2}}{|D_3|} \tag{4.150}$$

$$H_8 = \frac{\sqrt{[1+\rho^2(\Gamma-1)]^2 + [2\xi\rho]^2}}{|D_3|} \tag{4.151}$$

$$\tan a_2 = \frac{2\xi_d f\rho(\Gamma+\overline{m})}{f^2(\Gamma+\overline{m}) - \Gamma\rho^2} \tag{4.152}$$

$$\tan a_3 = \frac{2\xi\rho}{1+(\Gamma-1)\rho^2} \tag{4.153}$$

$$\delta_6 = a_2 - \delta_7 \tag{4.154}$$

$$\delta_8 = a_3 - \delta_7 \tag{4.155}$$

که D_3 توسط معادله (۴-۱۰۷) تعریف می‌شود و δ_7 با معادله (۴-۱۱۱) محاسبه می‌گردد. با این تفاصیل می‌توان مطابق آنچه در بخش ۴-۴ توصیف شده پیش رفت. نسبت جرمی به صورت جرم معادل SDOF تعریف می‌شود.

$$\overline{m} = \frac{m_d}{\tilde{m}_{1e}} \tag{4.156}$$

با معلوم بودن $\overline{m}$ و ξ_d می‌توان فرکانس تنظیم کننده و نسبت میرایی میراگر را با استفاده از اشکال ۴-۳۰ و ۴-۳۱ پیدا کرد. پارامترهای میراگر با معادلات زیرین تعیین می‌شوند:

$$m_d = \bar{m}\,\tilde{m}_{1e} \quad (4.157)$$

$$\omega_d = f_{opt}\omega_1 \quad (4.158)$$

$$c_d = 2\xi_d\big|_{opt}\omega_d m_d \quad (4.159)$$

با بسط دادن فرم جرم میراگر:

$$m_d = \bar{m}\,\tilde{m}_{1e} = \frac{\bar{m}[\Phi_1^T \mathbf{M}\Phi_1]}{\Phi_{12}^2} \quad (4.160)$$

که نشان می‌دهد باید محل TMD را به نحوی انتخاب نمود که بادامنه حداکثر شکل مودی کنترل کننده منطبق باشد. در این حالت، مود اول، مود هدف است و φ_{12} دامنه حداکثرφ_1 می‌باشد.

این امر (استنتاج شماره مود) میتواند تعمیم داده شود تا فرکانس مود **i** ام تنظیم کننده باشد.

می‌توان معادله (۴-۱۳۹) را به فرم زیر نوشت:

$$q_i \approx \left[\frac{1}{\Phi_{i2}}\right]u_2 \quad (4.161)$$

که**i**, ۱ یا ۲ می باشد. پارامترهای معادل برابرند با:

$$\tilde{m}_{ie} = \left[\frac{1}{\Phi_{i2}^2}\right]\tilde{m}_i \quad (4.162)$$

$$\tilde{k}_{ie} = \omega_i^2\tilde{m}_{ie} \quad (4.163)$$

با معلوم بودن $\tilde{m}_{ie}, \xi_i$و $\bar{m}$ تنظیم بهینه با معادله زیر مشخص می‌شود.

$$\omega_d = f_{opt}\omega_i \quad (4.164)$$

مثال ۴-۴: طراحی TMD برای سیستم MDOF با میرایی

برای نشان دادن پروسه یاد شده (معادلات اخیر) یک سیستم 2DOF با $m_1 = m_2 = 1$ در نظر گرفته می‌شود. طراحی سیستم برای دوره تناوبی اصلی $T_1 = 1S$ و با یک پروفیل تغییر شکل مود اصلی یکنواخت، سختی‌های زیر بدست می‌ایند:

$$k_1 = 12\pi^2 = 118.44$$
$$k_2 = 8\pi^2 = 78.96$$

با در نظر گرفتن نسبت میرایی مود اصلی مساوی ۲٪ و با متناسب گرفتن میرایی با سختی $\alpha, (C = \alpha K)$ عبارتست از:

$$\alpha = \frac{2\xi_1}{\omega_1} = \frac{0.02}{\pi} = 0.0064$$

ماتریس‌های جرم، سختی و میرایی برای شرایط طراحی عبارتند از:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 197.39 & -78.96 \\ -78.96 & 78.96 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1.26 & -0.51 \\ -0.51 & 0.51 \end{bmatrix}$$

با انجام تحلیل معادل، فرکانس‌ها و شکل‌های مودی زیرین حاصل می‌شوند.

$$\omega_1 = 6.28 \mathrm{r/s} \qquad \omega_2 = 15.39 \mathrm{r/s}$$
$$\mathbf{\Phi}_1 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1.0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{\Phi}_2 = \begin{bmatrix} 1.0 \\ -0.5 \end{bmatrix}$$

جرم مودی مربوط وترمهای سختی و میرایی عبارتند از:

$$\tilde{m}_1 = \mathbf{\Phi}_1^{\mathrm{T}} \mathbf{M} \mathbf{\Phi}_1 = 1.25 \qquad \tilde{m}_2 = \mathbf{\Phi}_2^{\mathrm{T}} \mathbf{M} \mathbf{\Phi}_2 = 1.25$$

$$\tilde{k}_1 = \Phi_1^T \mathbf{K} \Phi_1 = 39.48 \qquad \tilde{k}_2 = \Phi_2^T \mathbf{K} \Phi_2 = 236.87$$

$$\tilde{c}_1 = \Phi_1^T \mathbf{C} \Phi_1 = 0.25 \qquad \tilde{c}_2 = \Phi_2^T \mathbf{C} \Phi_2 = 1.51$$

$$\xi_1 = \frac{\tilde{c}_1}{2\omega_1 \tilde{m}_1} = 0.02 \qquad \xi_2 = \frac{\tilde{c}_2}{2\omega_2 \tilde{m}_2} = 0.049$$

پارامترهای بهینه برای TMD نسبت جرمی مساوی ۰/۰۱ دارد و به مود مشخصی که در زیر لیست شده است، تنظیم می‌گردد.

مود ۱- محل بهینه در گره ۲

$$f_{opt} = 0.982 \qquad \xi_d\big|_{opt} = 0.062$$

$$m_d = 0.0125 \qquad k_d = 0.4754 \qquad c_d = 0.0096$$

مود ۲- محل بهینه در گره ۱

$$f_{opt} = 0.972 \qquad \xi_d\big|_{opt} = 0.068$$

$$m_d = 0.05 \qquad k_d = 11.1894 \qquad c_d = 0.1017$$

حالت عمومی یک سیستم MDOF بامیراگر جرمی تنظیم شده متصل به درجه آزادی n ام به روش مشابه بیان می‌شود. با استفاده از علائم تعریف شده قبلی، معادله مود j ام به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\tilde{m}_j \ddot{q}_j + \tilde{c}_j \dot{q}_j + \tilde{k}_j q_j = \tilde{p}_j + \Phi_{jn}[k_d u_d + c_d \dot{u}_d] \quad j = 1, 2, \ldots \tag{4.165}$$

که $\tilde{P}_j$ نیروی مودی مربوط به حرکت زمین و بارگذاری خارجی را نشان می‌دهد و جزئی از φ_j است که مربوط به متغیر تغییر مکانی nام آن است. برای کنترل پاسخ مودی iام، j=۱ در معادله (۴-۱۶۵) قرار داده می‌شود و تخمین زیر منظور می‌گردد:

$$q_i \approx \left[\frac{1}{\Phi_{in}}\right] u_n \tag{4.166}$$

این جایگذاری ها، معادله زیرین را برای u_n نتیجه می‌دهد:

$$\tilde{m}_{ie}\,\ddot{u}_n + \tilde{c}_{ie}\,\dot{u}_n + \tilde{k}_{ie}\,u_n = \tilde{p}_{ie} + k_d u_d + c_d \dot{u}_d \tag{4.167}$$

که:

$$\tilde{m}_{ie} = \left[\frac{1}{\Phi_{in}^2}\right]\tilde{M}_i = \left[\frac{1}{\Phi_{in}^2}\right]\Phi_i^T \mathbf{M}\Phi_i \tag{4.168}$$

$$\tilde{k}_{ie} = \omega_i^2 \tilde{m}_{ie} \tag{4.169}$$

$$\tilde{c}_{ie} = \alpha \tilde{k}_{ie} \tag{4.170}$$

$$\tilde{p}_{ie} = \frac{1}{\Phi_{in}}\tilde{p}_i \tag{4.171}$$

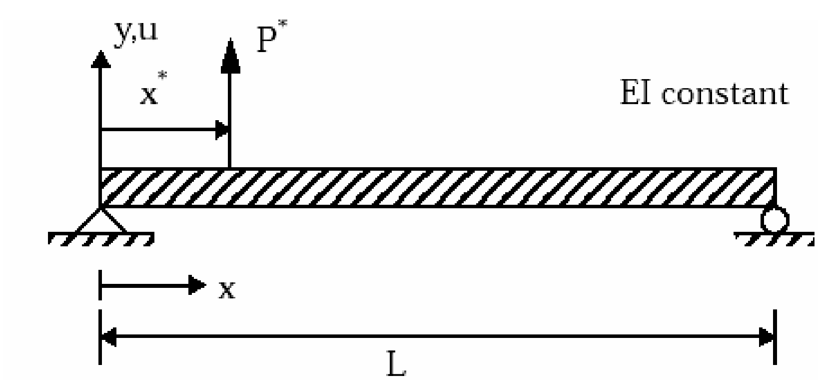
گام‌های باقیمانده شبیه همان‌هایی هستند که قبلا توصیف شد. $\bar{m}$ و ξ_1 مشخص می‌شود، مقادیر تنظیم و میرایی بهینه از اشکال (۴-۳۰) و (۴-۳۱) تعیین می شود و سپس m_d و ω_d به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$m_d = \bar{m}\,\tilde{m}_{ie} = \left[\frac{\bar{m}}{\Phi_{in}^2}\right]\Phi_i^T \mathbf{M}\Phi_i \tag{4.172}$$

$$\omega_d = f_{opt}\,\omega_i \tag{4.173}$$

میراگر جرمی بهینه برای مودi با انتخاب n به صورتی که φ_{in} بیشترین جزء φ_i باشد، بدست می‌اید.

مثال ۴-۵: طراحی TMD برای تیر با تکیه‌گاه ساده



شکل ۱

تیر با تکیه گاه ساده در شکل ۱ را در نظر بگیرید.

شکل های مودی و فرکانس ها برای حالتی که ویژگیهای مقطع ثابت می‌مانند و تغییر شکل برشی عرضی ناچیز است عبارتند از:

$$\Phi_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{L} \tag{1}$$

$$\omega_n^2 = \frac{EI}{\rho_m}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 \tag{2}$$

$$n = 1, 2, \ldots$$

N معادله با n مختصه مودی بدست می اید اگر تغییر مکان عرضی(x) u به صورت زیر بیان شود.

$$u = \sum_{j=1}^{N} q_i(t)\Phi_j(x) \tag{3}$$

و با جایگذاری u در اصل تغییر مکان مجازی که در آن تغییر شکل برشی عرضی صرفنظر شده است (معادله (۲-۱۹۴) را ببینید).

$$\int_0^L M\delta\chi dx = \int b\delta u dx \tag{4}$$

با جایگذاری برای $\delta\chi$

$$\delta\chi = -\frac{d^2}{dx^2}(\delta u) \tag{5}$$

و گرفتن:

$$\delta u = \delta q_j \Phi_j \tag{6}$$

معادله زیرین نتیجه می‌شود:

$$-\int M\Phi_{j,\,xx}dx = \int b\Phi_j dx \qquad (7)$$
$$j = 1, 2, \ldots, N$$

سرانجام جایگذاری M و b به صورت ترم‌هایی از q, φ انجام می‌شود و انتگرال‌ها محاسبه می شوند . M و b به صورت زیر هستند.

$$M = EI\chi = -EI\sum_{l=1}^{N} q_l \Phi_{l,\,xx} \qquad (8)$$

$$b = -\rho_m \ddot{u} + \bar{b}(x, t) = -\rho_m \sum_{l=1}^{N} \Phi_l \ddot{q}_l + \bar{b}(x, t) \qquad (9)$$

با توجه به خواص عمود بودن (ارتوگونالیتی) توابع شکل مودی:

$$\int_0^L \Phi_j \Phi_k dx = \delta_{jk}\frac{L}{2} \qquad (10)$$

$$\int_0^L \Phi_{j,\,xx}\Phi_{k,\,xx}dx = \left(\frac{j\pi}{L}\right)^4 \delta_{jk}\frac{L}{2} \qquad (11)$$

معادلات مودی غیر درگیر (غیر کاپل) شده و به صورت زیر کاهش می‌یابند:

$$\tilde{m}_j \ddot{q}_j + \tilde{k}_j q_j = \tilde{p}_j \qquad (12)$$

که:

$$\tilde{m}_j = \frac{L\rho_m}{2} \tag{13}$$

$$\tilde{k}_j = EI\left(\frac{j\pi}{L}\right)^4\frac{L}{2} \tag{14}$$

$$\tilde{p}_j = \int_0 \bar{b}\sin\frac{j\pi x}{L}dx \tag{15}$$

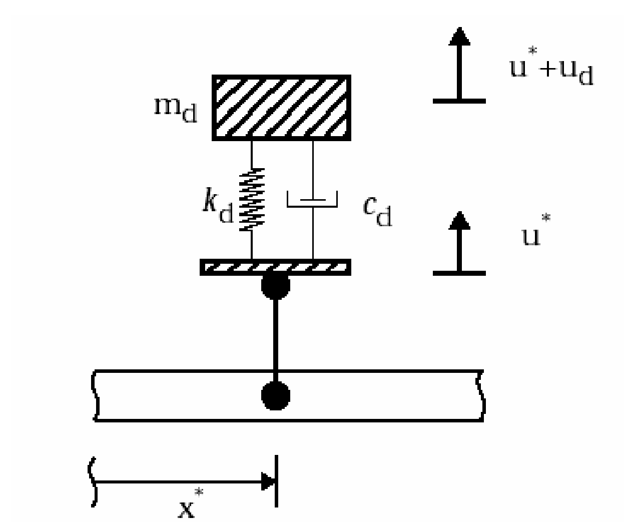
وقتی بارگذاری خارجی ، بار متمرکزی باشد که در محل $x=x^*$ اعمال می‌شود (شکل ۱ را ببینید) بار مودی مربوط برای مود j ام عبارتست از:

$$\tilde{p}_j = P^*\sin\frac{j\pi x^*}{L} \tag{16}$$

در این مثال، نیرو به صورتی لحاظ گردید که به جرم متصل شده به تیر مربوط شود (که در شکل ۲ نشان داده شده است) . معادلات جرم تنظیم شده و نیرو عبارتند از:

$$m_d(\ddot{u}^* + \ddot{u}_d) + k_d u_d + c_d\dot{u}_d = 0 \tag{17}$$

$$m_d(\ddot{u}^* + \ddot{u}_d) = -P^* \tag{18}$$



شکل ۲

فرض کنید که بخواهیم پاسخ مود i ام را با میرگر جرمی تنظیم شده ای که در $x=x^*$ متصل شده، کنترل کنیم. با قراردادن $j=i$ در معادلات (۱۲) و (۱۳) معادله مود i ام شکل زیرین را دارد:

$$\tilde{m}_i\ddot{q}_i + \tilde{k}_i q_i = (k_d u_d + c_d \dot{u}_d)\sin\frac{i\pi x^*}{L} \qquad (19)$$

با فرض اینکه پاسخ مودi ام غالب است، $u^*_{(x^*,t)}$ به صورت زیر تخمین زده می‌شود:

$$u^*(x^*, t) \approx q_i \sin\frac{i\pi x^*}{L} \qquad (20)$$

و معادله (۱۹) به معادله‌ای تبدیل می‌شود که در آن u^* و u_d وجود دارند:

$$\tilde{m}_{ie}\ddot{u}^* + \tilde{k}_{ie}u^* = k_d u_d + c_d \dot{u}_d \qquad (21)$$

که:

$$\tilde{m}_{ie} = \frac{1}{\left(\sin\frac{i\pi x^*}{L}\right)^2}\,\tilde{m}_i \qquad (22)$$

در گام‌های باقیمانده از نتایج بدست آمده برای سازه SDOF بدون میرایی و سیستم TMD با میرایی استفاده می‌شود که در بخش ۴-۳ در نظر گرفته شد. می‌توان $\tilde{m}_{ie}$ و $\tilde{K}_{ie}$ را به عنوان پارامترهای جرم و سختی برای سیستم اولیه استفاده نمود.

برای نشان دادن پروسه، در نظر بگیرید که میراگر در وسط دهانه واقع باشد و مود اول کنترل کننده باشد، با انتخاب $i=1$, $x^* = \frac{L}{2}$ پارامترهای مربوطه عبارتند از:

$$\sin\frac{i\pi x^*}{L} = 1 \tag{23}$$

$$\tilde{m}_{ie} = \tilde{m}_1 = \frac{L\rho_m}{2} \tag{24}$$

$$\tilde{k}_{ie} = \tilde{k}_1 = \frac{EIL}{2}\left(\frac{\pi}{L}\right)^4 \tag{25}$$

نسبت میرایی معادل، ξ_e مشخص می شود و نسبت جرمی مورد نیاز از شکل ۴-۳۲ تعیین می‌گردد. برای مثال، برای $\xi_e = 0/06$ نیاز است که $\bar{m} = 0/03$ باشد. پارامترهای دیگر مربوط به $\bar{m} = 0/03$ از اشکال (۴-۲۹) ، (۴-۳۰) و (۴-۳۱) بدست می‌ایند.

$$f_{opt} = \frac{\omega_d}{\omega_1} = 0.965 \tag{26}$$

$$\xi_d\Big|_{opt} = 0.105 \tag{27}$$

$$\frac{\hat{u}_d}{\hat{u}^*} = 5 \tag{28}$$

با استفاده از این پارامترها، پارامترهای مربوط به ویژگیهای میراگر عبارتند از:

$$m_d = 0.03\tilde{m}_1 \tag{29}$$

$$\omega_d = 0.965\,\omega_1 \tag{30}$$

$$k_d = \omega_d^2 m_d \tag{31}$$

$$c_d = 2\xi_d\omega_d m_d \tag{32}$$

وقتی $\tilde{m}_1$ و ω_1 تعیین شوند خواص و ویژگیهای میراگر قابل ارزیابی و تعیین هستند. برای مثال ، تیر را یک تیر فولادی در نظر بگیرید که ویژگیهای زیر را دارد:

$$
\begin{aligned}
L &= 20m \\
\rho_m &= 1000kg/m \\
I &= 8\times 10^{-4}m^4 \\
E &= 2\times 10^{11}N/m^2
\end{aligned}
\tag{33}
$$

پارامترهای تیر عبارتند از:

$$
\begin{aligned}
\tilde{m}_1 &= 10,000kg \\
\omega_1 &= 9.87r/s
\end{aligned}
\tag{34}
$$

با استفاده از معادلات (۲۹) تا (۳۲) نتیجه می گیریم:

$$
\begin{aligned}
m_d &= 300kg \\
\omega_d &= 9.52r/s \\
k_d &= 27,215N/m \\
c_d &= 599.8Ns/m
\end{aligned}
\tag{35}
$$

جرم کلی تیر اصلی ۲۰/۰۰۰ کیلوگرم است. با افزودن ۳۰۰ کیلوگرم که تنها ٪۱/۵ از جرم کلی است، نسبت میرایی موثر ۰/۰۶ برای پاسخ مود اول تولید می‌شود.

شکل مودی برای مود دوم، نقطه صفر (نال) در $X = \frac{L}{2}$ دارد و بنابراین با قراردادن یک جرم تنظیم شده در این نقطه اثری در پاسخ مود دوم ایجاد نخواهد شد. محل‌های بهینه، $X^* = \frac{L}{4}$ و $X^* = \frac{3L}{4}$ هستند با قراردادن $i = 2, X^* = \frac{L}{4}$ مقادیر زیر را بدست می‌آوریم:

$$\sin\frac{i\pi x^*}{L} = 1 \tag{36}$$

$$\tilde{m}_{2e} = \tilde{m}_2 = \frac{L\rho_m}{2} \tag{37}$$

$$\tilde{k}_{2e} = \tilde{k}_2 = 8EIL\left(\frac{\pi}{L}\right)^4 \tag{38}$$

$$\omega_2^2 = \frac{16EI}{\rho_m}\left(\frac{\pi}{L}\right)^4 \tag{39}$$

پروسه باقیمانده از اینجا به بعد همان است که قبلاً بحث شد. ξ_e مشخص می‌شود و نسبت جرمی مورد نیاز و سپس فرکانس و پارامترهای میرایی تعیین می‌شوند. اگر خواص (ویژگیهای) میراگر مربوطه با نسبت میرایی معادل مقایسه شوند، سودمند خواهد بود. با لحاظ کردن $\xi_e = 0/06$ ویژگیهای میراگر برای تیر فولادی نمونه عبارتند از:

$$m_d = 300kg \tag{40}$$

$$k_d = 435,440N/m \tag{41}$$

$$c_d = 2400Ns/m \tag{42}$$

سختی میراگر مورد نیاز یک مرتبه بزرگتر از مقدار مربوط به پاسخ مود اول است.